VIII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

**Решения заданий регионального этапа, 2 день**

**5.** *Три спортсмена пробежали дистанцию в 3 километра. Первый километр они бежали с постоянными скоростями v1, v2 и v3 соответственно, такими, что v1 > v2 > v3. После отметки в 1 километр каждый из них изменил скорость: первый — с v1 на v2, второй — с v2 на v3, а третий — с v3 на v1. Кто из спортсменов пришел к финишу последним?* (Н. Чернега)

**Ответ.** Второй. **Решение**.Первый спортсмен пробежал дистанцию быстрее второго, так как его скорость была выше скорости второго как на первом километре дистанции, так и на двух последних. Третий спортсмен на первый километр потратил столько же времени, сколько второй — на второй километр, а второй и третий километры бежал быстрее, чем второй — первый и третий километры. Поэтому он также пришёл к финишу раньше второго, откуда и вытекает ответ.

**6.** *Найдите все натуральные числа, которые можно представить в виде , где х, y и z — три различных натуральных числа.* (Д. Храмцов)

**Ответ.** Все натуральные числа, кроме 1. **Решение**. Любое натуральное число *n* > 1 получается, если положить *х* = 1, *y* = *n* и *z* =*n*2: . Покажем, что число 1 получить нельзя. Для этого достаточно показать, что если натуральные числа *х, у* и *z* различны, то *ху*+*yz*+*zx* > *х*+*у*+*z.* В самом деле, *хy* ≥ *х, yz* ≥ *у* и *zx* ≥ *z,* и эти неравенства обращаются в равенства только при *x = у = z =*1. **Замечание**. Приведём другой способ представить любое число *n* > 1. Выберем для начала числа *х* > *y* так, что *х*+*y* = *n*+1 (тогда *х* ≥ 2). Заметим, что

.

Значит, полагая *z* = (*x*2+*х*y+*y*2)–(*x*+*y*), мы получаем искомую тройку, если проверим, что *z* отлично от *x* и *y*. Так как *х* ≥ 2, имеем *x*2–*x* ≥ *х* и *y*2–*y* ≥ 0, откуда
*z* = (*x*2–*x*)+(*y*2–*y*)+*xy* ≥ *x*+0+*y* > ma*x*(*x*, *y*). Отсюда и следует требуемое.

**7.** *В ряд выложено 100 монет. Внешне все монеты одинаковы, но где-то среди них лежат подряд 50 фальшивых (а остальные— настоящие). Все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые могут весить по-разному, но каждая фальшивая легче настоящей. Можно ли с помощью одного взвешивания на чашечных весах без гирь найти хотя бы 34 настоящие монеты?* (О. Дмитриев, Р. Женодаров)

**Ответ.** Можно. **Решение**. Пронумеруем монеты слева направо числами от 1 до 100. Сравним монеты 17 и 84. Хотя бы одна из них — настоящая. Поэтому, если весы в равновесии, то обе монеты — настоящие; в этом случае настоящими будут 34 монеты с номерами 1–17 и 84–100, так как 50 фальшивых монет в этих промежутках не умещаются. Пусть теперь перевесила монета 17. Тогда она — настоящая, а монета 84 — фальшивая. Так как номера любых двух фальшивых монет отличаются не более чем на 49, в этом случае наименьший номер фальшивой монеты не меньше 84–49 = 35, то есть монеты 1–34 обязательно настоящие. Если же перевесила монета 84, аналогичные рассуждения показывают, что настоящими являются монеты 67–100.

**8.** *Точки М и N — середины биссектрис АК и CL треугольника ABC соответственно. Докажите, что угол ABC прямой тогда и только тогда, когда  MBN = 45°.* (А. Кузнецов, методкомиссия)

**Решение**. Пусть угол *ABC* —прямой (см. рис. справа). Тогда *ВМ* и *BN —* медианы в прямоугольных треугольниках *АВК* и *CBL,* откуда *MBA =**MAB* = *BAC*/2и *NBC* =*NCB* = *BCA*/2*.* Значит, *MNB =*90°–(*BAC*+*BCA*)/2= 45°.

Пусть угол *ABC* — тупой (см. рис. внизу слева). Обозначим через *R* и *Т* середины сторон *АВ* и *АС* соответственно. Тогда точка *М* лежит на средней линии *TR* треугольника *ABC.* Как известно, в тупоугольном треугольнике медиана тупого угла короче по­ловины стороны, к которой она проведена, то есть *ТВ* < *ТА.* Поскольку *ТR* — медиана в треугольнике *ATВ,* отсюда следует, что основание биссектрисы этого треугольника, проведённой из вершины *Т*, лежит на отрезке *RB.* Значит, точка пересечения биссектрис этого треугольника лежит на отрезке *МК.* Аналогично, точка пересечения биссектрис треугольника *СТВ* лежит на отрезке *NL.* Следовательно, *MBN =**MBT*+*NBT > (**ABT*+*CBT)*/2 = *ABC*/2 *>*45°.

Аналогично доказывается, что если угол *ABC* острый (см. рис. внизу справа), то точки пересечения биссектрис треугольников *AT В* и *ВТС* лежат на отрезках *AM* и *CN* соответственно, откуда *MBN* < *АВС*/2 < 45°.